



# La reconstruction des images



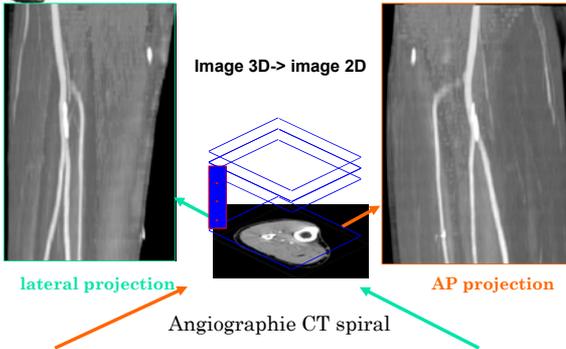
## La reconstruction d'images

### Image nD->mD

- Image nD -> (m<n)D
  - $m=n-1 \Rightarrow$  fonction de transfert (MIP, moyenne, ..)
  - coupe curviligne,
  - images paramétriques (T1, T2, carte activité fMRI, DTI, ...)
- Image nD -> (m>n)D
  - Reconstruction images à partir de projections,
  - Images 3D à partir de coupes 2D (multi-coupes)
  - Image volumique 3D



## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D MIP (Maximum Intensity Projection)



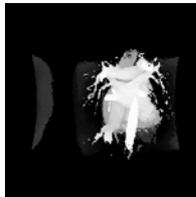
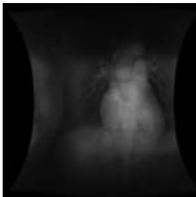
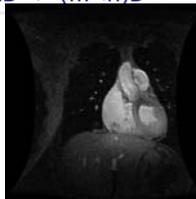
## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D Les fonctions de transfert

- **Maximum intensity projection (MIP)** – Intensité est la valeur maximum des voxels le long de la projection
- **Moyenne** – Intensité moyenne le long de la projection
- **Distance** – Distance du départ de la projection jusqu'à la première intensité spécifiée.



## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D Exemple

2D cardiac MRI image  
d'un volume  $75 \times 256 \times$   
 $256$ -voxel .



MIP

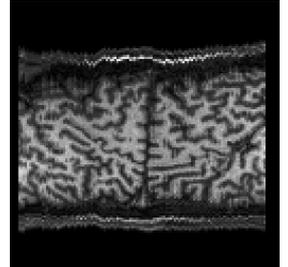
Moyenne

Distance à l'intensité 0.5



## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D Coupe curviligne régulière

### Image 3D-> image 2D

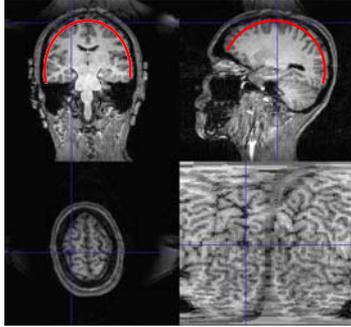




## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D

### Coupe curviligne adaptée

### Image 3D-> image 2D



Détection de lésion dans une visualisation par coupe curviligne : patient épileptique.



## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D

### Les images paramétriques : l'IRM de diffusion

- Diffusion : Mesure des mouvements aléatoires des molécules d'eau

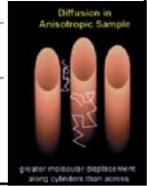
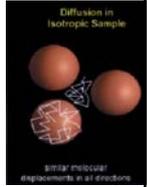
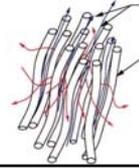
$$T = 50ms : \langle x^2 \rangle^{1/2} = 17\mu m$$

Principe : Mesurer la diffusion des molécules d'eau dans les tissus

=> information sur l'architecture des tissus

Ex : Diffusion isotrope dans le LCR

Ex : Diffusion favorisée le long des fibres



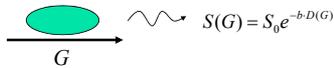
## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D

### Les images paramétriques : l'IRM de diffusion

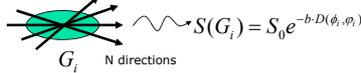
IRM Classique



Mesure de diffusion



Imagerie de diffusion



- Signal RMN de diffusion (S)
- D : coefficient de diffusion, b : pondération de diffusion

$$S = S_0 e^{-b \cdot D}$$



## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D

### L'imagerie du tenseur de diffusion (DTI)

- Acquisition d'IRM volumique avec au moins six directions de gradient différent.

$$S(q) = S_0 e^{-b(q) \cdot D(q)}$$

ou

S(q) = l'intensité du voxel pour chaque gradient q

S0 = l'intensité du voxel sans gradient

b(q) = "matrice b" = gamma^2 \* G \* G \* delta^2 \* (lambda - delta / 3) pour l'encodage du gradient q

gamma = 267.5 rad/ms.mT

Delta = délai entre les débuts du gradient,

delta = durée du gradient

$$\ln(S_0 / S(q)) = b(q) \cdot D$$

$$D(q) = \ln(S_0 / S(q)) \times b^{-1}$$

D = le tenseur de diffusion, avec les diffusions dans les 6 directions principales,

$$D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}, D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}$$

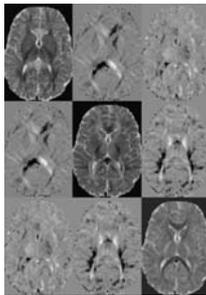


## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D

### L'imagerie du tenseur de diffusion (DTI)

### Le tenseur de diffusion

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} =$$



$$D_{xx}, D_{yy}, D_{zz} > 0$$

$$D_{xy} = D_{yx}, D_{xz} = D_{zx}, D_{yz} = D_{zy}$$

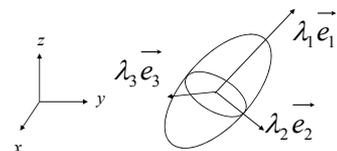


## La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D

### L'imagerie du tenseur de diffusion (DTI)

### La diagonalisation

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{bmatrix} = U^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} U \quad \text{avec} \quad U = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}$$



La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D  
L'imagerie du tenseur de diffusion (DTI)

**Caractérisation du tenseur**

Diffusion moyenne :  $\langle D \rangle = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}$

Fraction d'anisotropie :  $FA = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\lambda_1 - \langle \lambda \rangle)^2 + (\lambda_2 - \langle \lambda \rangle)^2 + (\lambda_3 - \langle \lambda \rangle)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$

Anisotropie relative :  $RA = \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \langle \lambda \rangle)^2 + (\lambda_2 - \langle \lambda \rangle)^2 + (\lambda_3 - \langle \lambda \rangle)^2}}{\sqrt{6} \langle \lambda \rangle}$

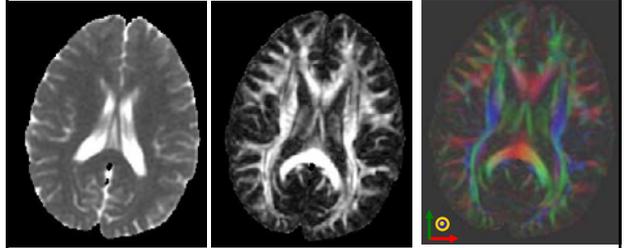
Volume ratio :  $VR = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\langle \lambda \rangle^3}$

La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D  
Les cartes DTI

Diffusion moyenne

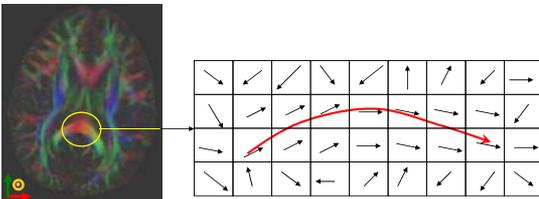
Anisotropie

Orientations  
codées en couleurs



La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D  
Suivi de faisceaux de fibres (Fiber tracking)

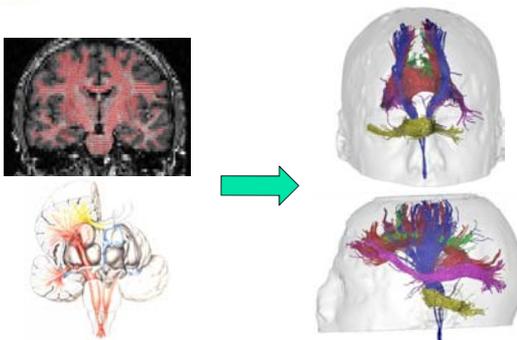
- Principe : utiliser l'information d'orientation dans chaque pixel et se propager de proche en proche pour construire une « fibre » d'un faisceau de matière blanche



La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D  
Suivi de faisceaux de fibres (Fiber tracking)

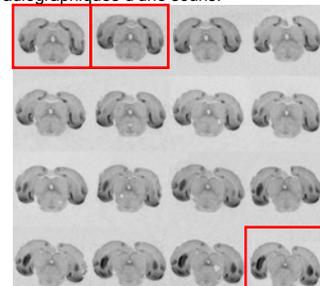
- Suit la direction principale de diffusion
- Contrainte de régularité sur la courbure
- Critères d'arrêt : FA, courbure limite,...
- Définition de ROI
- Gestion des croisements de fibres
- Visualisation
- Problème de la validation

La reconstruction d'images : nD -> (m<n)D  
Suivi de faisceaux de fibres (Fiber Tracking)



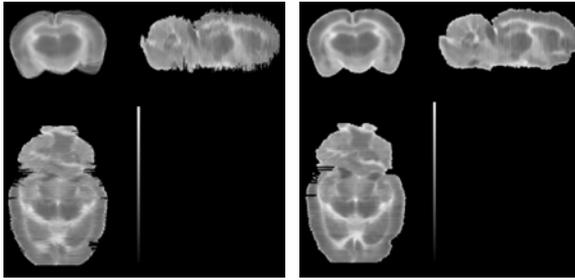
La reconstruction d'images : nD -> (m>n)D  
2D -> 3D

- Reconstruction d'une image à partir de coupes
  - Cas d'une reconstruction d'une image 3D à partir d'un ensemble de coupes auto-radiographiques d'une souris.



La reconstruction d'images : nD -> (m>n)D  
2D -> 3D

- Reconstruction d'une image à partir de coupes auto-radiographiques d'une souris.



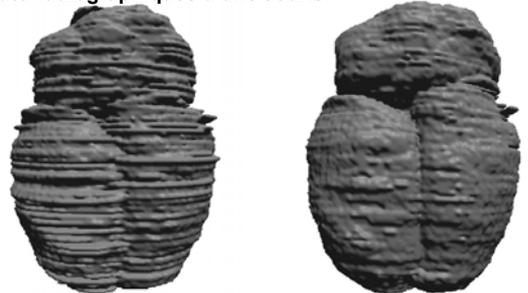
Avant recalage

Après recalage

Traitement images médicales - Jean-Paul LAMOTHE/CI - Master I271 2007-2008

La reconstruction d'images : nD -> (m>n)D  
2D -> 3D

- Reconstruction d'une image à partir de coupes auto-radiographiques d'une souris.



Avant recalage

Après recalage

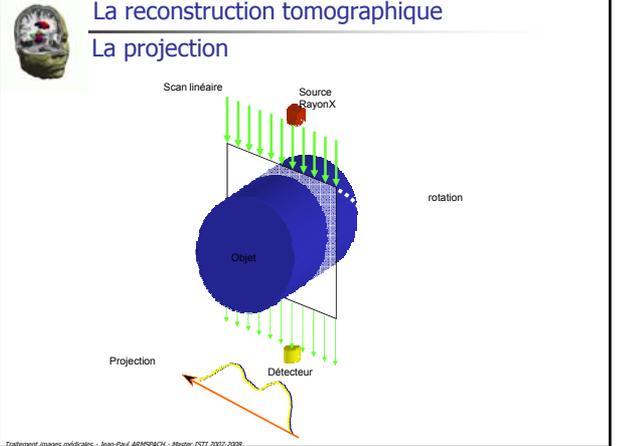
Traitement images médicales - Jean-Paul LAMOTHE/CI - Master I271 2007-2008

La reconstruction d'images : nD -> (m>n)D  
La reconstruction tomographique (1D -> 2D)

- Estimer la distribution 2D à partir de projections 1D mesurées
- La reconstruction tomographique => problème inverse

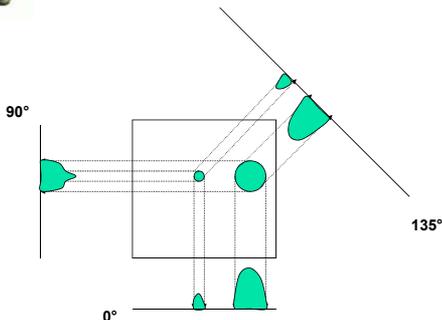
Traitement images médicales - Jean-Paul LAMOTHE/CI - Master I271 2007-2008

La reconstruction tomographique  
La projection



Traitement images médicales - Jean-Paul LAMOTHE/CI - Master I271 2007-2008

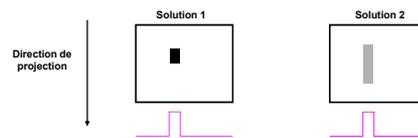
La reconstruction tomographique  
La projection



Traitement images médicales - Jean-Paul LAMOTHE/CI - Master I271 2007-2008

La reconstruction tomographique  
La reconstruction : non unicité de la solution

- Pas de solution unique : toujours plusieurs images compatibles avec un ensemble fini de projections.
  - En pratique 64, 128 projections
- Solution unique pour une infinité de projections seulement.



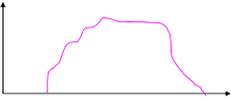
Traitement images médicales - Jean-Paul LAMOTHE/CI - Master I271 2007-2008



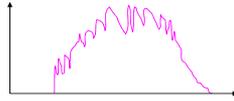
## La reconstruction tomographique

### La reconstruction : problème inverse mal posé

- Pas de solution du fait du bruit entachant les données (projections).
- Instabilité de la solution : petites différences sur les projections peuvent entraîner des différences importantes sur les images reconstruites.



Projection idéale



Projection bruitée

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - HECM STI 2002-2008



## La reconstruction tomographique

### La reconstruction

- Les méthodes analytiques
  - Expression continue du problème de reconstruction tomographique
  - Rechercher la transformée inverse (transformation de radon inverse)
  - méthodes
    - Reconstruction par inversion de Fourier
      - Peu utilisé
    - Rétroprojection filtrée
      - plus rapide
      - Disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)
  - Les méthodes discrètes ou itératives
    - meilleures lorsque le rapport signal à bruit est faible
    - Possibilités d'apporter de l'information par modélisation (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur, ...)
    - Temps de calcul plus important
    - Méthodes :
      - Itératives conventionnelles (ART, SIRT, ...)
      - Méthodes statistiques

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - HECM STI 2002-2008



## La reconstruction tomographique

### La transformée de Radon

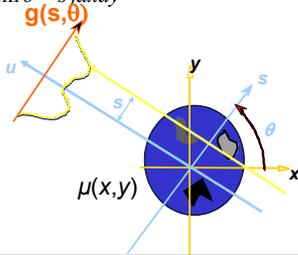
$$g(s, \theta) = \int \mu(x, y) du$$

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x \cos \theta - u \sin \theta, s \cos \theta + u \sin \theta) du$$

$$g(s, \theta) = \iint \mu(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$u = -x \sin \theta + y \cos \theta$$



Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - HECM STI 2002-2008



## La reconstruction tomographique

### La transformée de Radon

- $g(s, \theta)$  représente l'ensemble des projections pour  $\theta$  variant de  $[0, \pi]$
- $g(s, \theta)$  est appelé la **transformée de radon** de  $\mu(x, y)$   
 $g(s, \theta) = \text{TR}[\mu(x, y)]$

$\mu(x, y)$  domaine spatial  
 $g(s, \theta)$  espace de radon

- Problème de la reconstruction tomographique : inverser la transformée de radon afin d'obtenir  $\mu(x, y)$

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - HECM STI 2002-2008



## La reconstruction tomographique

### Théorème coupe-projection

$$FT(g(s, \theta_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s, \theta_1) e^{-i\omega s} ds$$

$$= \iint \mu(x \cos \theta_1 - u \sin \theta_1, s \sin \theta_1 + u \cos \theta_1) e^{-i\omega s} ds du$$

En remplaçant u et s par x et y alors

$$FT(g(s, \theta_1)) = \iint \mu(x, y) e^{-i\omega(x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)} dx dy$$

$$FT(g(s, \theta_1)) = TF(\mu(x, y))|_{\theta_1} = F(\omega_x, \omega_y)|_{\theta_1} = F(\omega, \theta_1)$$

F est la Transformée de Fourier de  $\mu(x, y)$ , et  $F(\omega, \theta_1)$  montre que la TF de  $g(s, \theta_1)$  correspond aux données radiales dans le domaine de Fourier de  $\mu(x, y)$  à un angle  $\theta_1$ .

Ceci est le théorème de la coupe projection aussi connu sous le nom de théorème de la coupe centrale et qui permettra de reconstruire l'image.

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - HECM STI 2002-2008

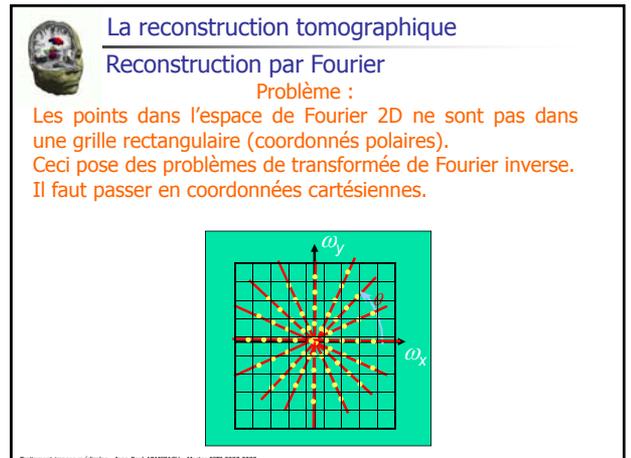
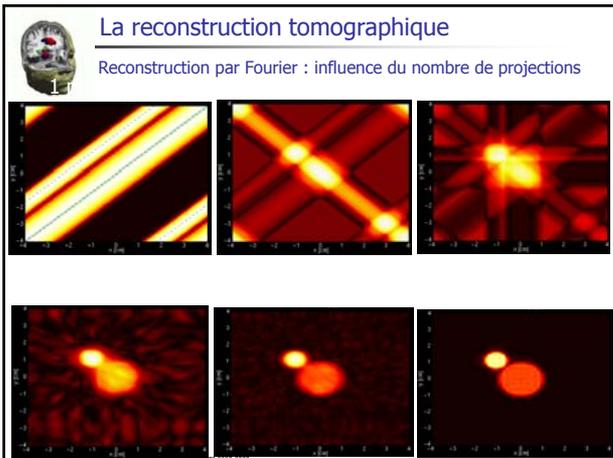
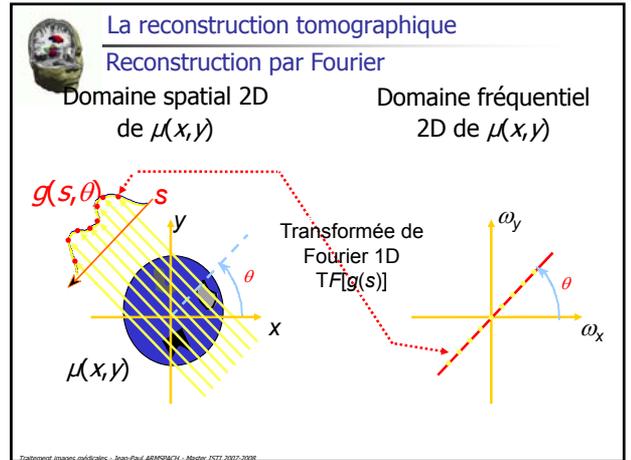
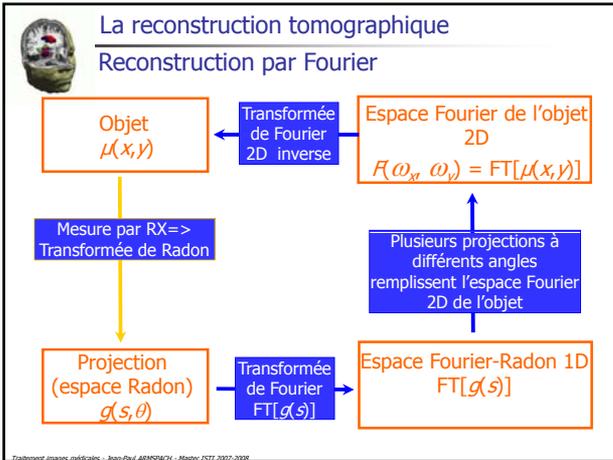
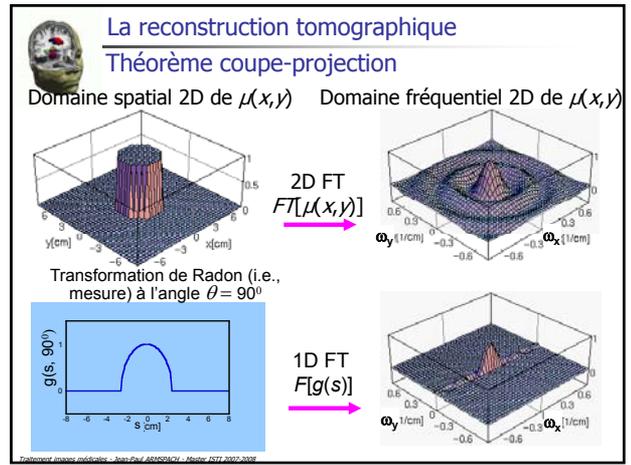
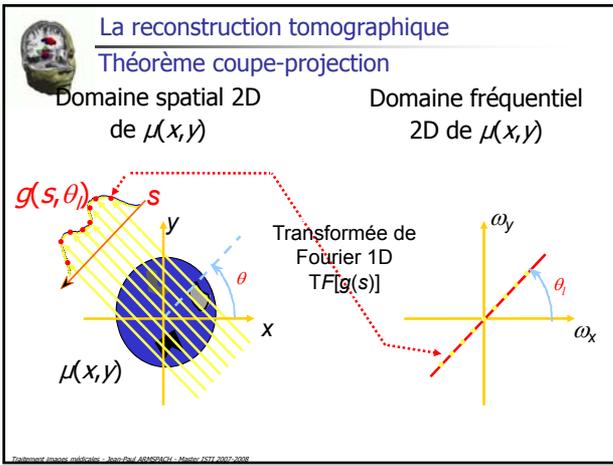


## La reconstruction tomographique

### Théorème coupe-projection

Si  $g(s, \theta)$  est la transformée de Radon de la fonction  $\mu(x, y)$ , alors la transformée de Fourier 1D de la projection  $g(s, \theta_1)$ , en fonction de s, pour un angle  $\theta_1$ , est la coupe centrale, à l'angle  $\theta_1$ , de la transformée de Fourier 2D  $F(\omega_x, \omega_y)$  de la fonction  $\mu(x, y)$

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - HECM STI 2002-2008





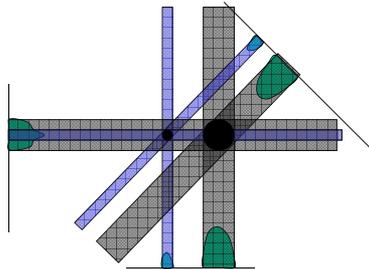
## Rappel

- $g(s, \theta)$  représente l'ensemble des projections pour  $\theta$  variant de  $[0, \pi]$
- $g(s, \theta)$  est appelé la transformée de radon de  $\mu(x, y)$   
 $g(s, \theta) = \text{TR}[\mu(x, y)]$   
 $\mu(x, y)$  domaine spatial  
 $g(s, \theta)$  espace de radon
- Problème de la reconstruction tomographique : inverser la transformée de radon afin d'obtenir  $\mu(x, y)$

Traitement images numériques - Jean-Paul REMONDIACH - Master ISTI 2002-2003



## La reconstruction tomographique La reconstruction par rétro projection



Traitement images numériques - Jean-Paul REMONDIACH - Master ISTI 2002-2003



## La reconstruction tomographique La reconstruction par rétro projection

### Rétro-projection (BP) d'un ensemble de projections $g(s, \theta)$

$$\hat{\mu}(x, y) = \text{BP}[g(s, \theta)] = \int_0^\pi g(s, \theta) d\theta$$

$$\hat{\mu}(x, y) = \text{BP}[g(s, \theta)] = \int_0^\pi g(s = x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

Poisons :

$$TF(\mu(x, y)) = F(\omega_x, \omega_y)$$

$$TF(g(s, \theta)) = G(\omega, \theta)$$

Or d'après le théorème de la coupe centrale

$$F(\omega_x, \omega_y) = G(\omega, \theta)$$

Traitement images numériques - Jean-Paul REMONDIACH - Master ISTI 2002-2003



## La reconstruction tomographique La reconstruction par rétro projection

$$\mu(x, y) = TF^{-1}(F(\omega_x, \omega_y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{i(x\omega_x + y\omega_y)} d\omega_x d\omega_y$$

comme  $F(\omega_x, \omega_y) = G(\omega, \theta)$

$$\text{alors } \mu(x, y) = TF^{-1}(F(\omega_x, \omega_y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \theta) e^{i(x\omega_x + y\omega_y)} d\omega_x d\omega_y$$

changement de variable

$$\omega_x = \omega \cos(\theta)$$

$$\omega_y = \omega \sin(\theta)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$$

$$d\omega_x d\omega_y = \omega d\omega d\theta$$

$$\text{alors } \mu(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi G(\omega, \theta) |\omega| e^{i\omega \cdot s} d\omega d\theta$$

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(s, \theta) d\theta \quad \text{avec} \quad \hat{g}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \theta) |\omega| e^{i\omega \cdot s} d\omega$$

Projection filtrée

Filtre rampe

Traitement images numériques - Jean-Paul REMONDIACH - Master ISTI 2002-2003



## La reconstruction tomographique La reconstruction par rétro projection

Théorème de la transformée de Radon inverse :

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(s = x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$$\hat{g}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{i\omega s} d\omega$$

$$\text{donc } \mu(x, y) = \text{BP}[h(s) * g(s, \theta)]$$

Ou  $h$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre 1D de réponse en fréquence :  $H(\omega) = |\omega|$

Traitement images numériques - Jean-Paul REMONDIACH - Master ISTI 2002-2003



## La reconstruction tomographique La reconstruction par rétro projection

### Rétro-projection (BP) d'un ensemble de projections $g(s, \theta)$

$$\hat{\mu}(x, y) = \text{BP}[g(s, \theta)] = \int_0^\pi g(s = x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

On démontre à partir de la démonstration précédente que la rétro projection des projections est :

$$\hat{\mu}(x, y) = \text{BP}[g(s, \theta)] = \mu(x, y) * \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Et permet d'obtenir l'image originale convoluée avec  $(x^2 + y^2)^{-1/2}$ .

Comment obtenir l'image non convoluée?

Traitement images numériques - Jean-Paul REMONDIACH - Master ISTI 2002-2003



## La reconstruction tomographique

### La reconstruction par rétro projection filtrée

Version 1 : Filtrage dans le domaine fréquentiel

$$\hat{\mu}(x, y) = \text{BP}[g(s, \theta)] = \mu(x, y) * (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$FT(\hat{\mu}(x, y)) = FT(\mu(x, y)) \cdot FT((x^2 + y^2)^{-1/2})$$

$$FT(\hat{\mu}(x, y)) = FT(\mu(x, y)) \cdot ((\omega_x^2 + \omega_y^2)^{-1/2})$$

$$FT^{-1}[FT(\hat{\mu}(x, y)) \cdot ((\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2})] = \mu(x, y)$$

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - Master IFTI 2007-2008



## La reconstruction tomographique

### La reconstruction par rétro projection filtrée

Algorithme de rétro-projection filtrée (version 1):

- (1) Rétro projection des transformées de Radon  $g(s, \theta)$ .
- (2) Transformée de Fourier de l'image résultat.
- (3) Multiplication de l'image dans le domaine Fourier par le filtre  $(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} = |\omega_r|$
- (4) Transformée de Fourier inverse du résultat précédent et obtention de l'image  $\mu(x, y)$ .

**Méthode pas trop utilisée !**

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - Master IFTI 2007-2008



## La reconstruction tomographique

### La reconstruction par convolution - rétro projection

Théorème de la transformée de Radon inverse :

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(s = x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$$\hat{g}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{i\omega s} d\omega$$

donc  $\mu(x, y) = \text{BP}[h(s) * g(s, \theta)]$

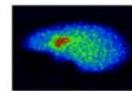
Ou  $h$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre 1D de réponse en fréquence :  $H(\nu) = |\nu|$

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - Master IFTI 2007-2008

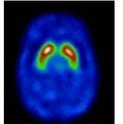


## La reconstruction tomographique

### La reconstruction par convolution - rétro projection



projections  $g(s, \theta)$



$\mu(x, y)$

Transformée de Fourier

Rétroprojection

$G(\omega, \theta)$

Filtrage

$|\omega|G(\omega, \theta)$

transformée de Fourier inverse

$\hat{g}(s, \theta)$

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - Master IFTI 2007-2008



## La reconstruction tomographique

### La reconstruction par convolution - rétro projection

Méthode de reconstruction par convolution-rétroprojection

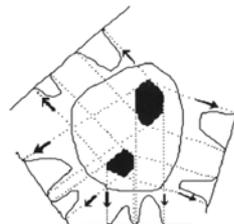
- (1) Approximation du noyau de convolution  $h(s)$
- (2) Convolution discrète de  $g(s, \theta)$  et de  $h(s)$
- (3) Interpolation de  $h(s) * g(s, \theta)$  en  $s = x \cos \theta + y \sin \theta$
- (4) Calcul de l'intégrale de rétroprojection

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - Master IFTI 2007-2008

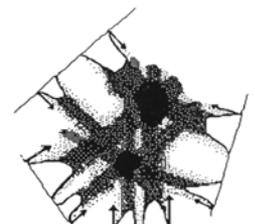


## La reconstruction tomographique

### La reconstruction par rétro projection



Rétroprojection filtrée



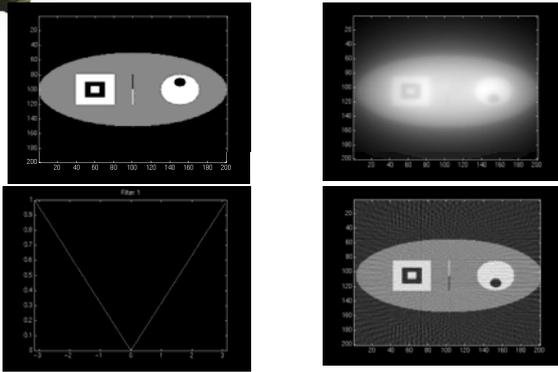
Rétroprojection non filtrée

Cho et al., *Foundations of Medical Imaging*, Wiley, 1993.

Traitement images médicales - Jean-Paul AMISFACH - Master IFTI 2007-2008



## La reconstruction tomographique



Traitement images numériques - Jean-Paul AMISERCH - Master 1STI 2007-2008



## La reconstruction tomographique

### Les méthodes discrètes

- Les méthodes discrètes ou itératives
  - Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique.
 
$$g = O \mu$$
 g (les projections) et O (opérateur de projection) connu,  $\mu$  (l'image à reconstruire) inconnu  
 Problème : déterminer  $\mu$  connaissant g et O.
  - Méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires avec minimisation de  $(g - O\mu)^2$

Traitement images numériques - Jean-Paul AMISERCH - Master 1STI 2007-2008



## reconstruction tomographique

### Les méthodes discrètes

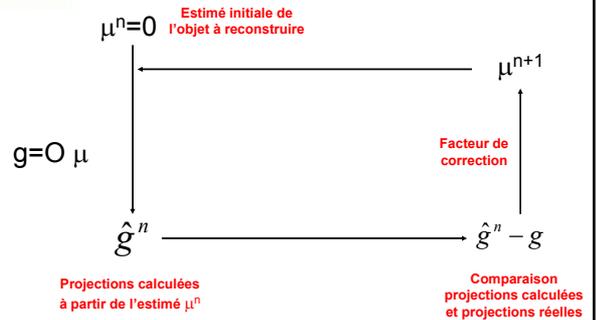
- Deux aspects
  - Modélisation géométrique
    - Modélisation de la contribution de chaque voxel à une projection
      - Bins de projection
      - Modèle de dirac
      - Modèle de longueur de raies
    - Modélisation de la géométrie de la détection (parallèle, éventail - fan beam)
  - Modélisation de la physique de la détection
    - atténuation
    - Diffusion
    - Résolution limitée du détecteur

Traitement images numériques - Jean-Paul AMISERCH - Master 1STI 2007-2008



## reconstruction tomographique

### Les méthodes discrètes : Principe



Traitement images numériques - Jean-Paul AMISERCH - Master 1STI 2007-2008